星期一, 21. 九月 2020

第 1 题. 考虑凸四边形 $ABCD$. 设 P 是 $ABCD$ 内部一点. 且以下比例等式成立:

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.$$

证明: $\angle ADP$ 的内角平分线、$\angle PCB$ 的内角平分线和线段 AB 的垂直平分线三线共点.

第 2 题. 设实数 a, b, c, d 满足 $a \geq b \geq c \geq d > 0$, 且 $a + b + c + d = 1$. 证明:

$$(a + 2b + 3c + 4d)\, a^a\, b^b\, c^c\, d^d < 1.$$

第 3 题. 有 $4n$ 枚小石子, 重量分别为 $1, 2, 3, \ldots, 4n$. 每一枚小石子都染了 n 种颜色之一, 使得每种颜色的小石子恰有四枚. 证明: 我们可以把这些小石子分成两堆, 同时满足以下两个条件:

- 两堆小石子有相同的总重量;
- 每一堆恰有每种颜色的小石子各两枚.

Language: Chinese (Simplified)

时间: *4* 小时 *30* 分
每题 *7* 分

星期二, 22. 九月 2020

第 4 题. 给定整数 $n > 1$. 在一座山上有 n^2 个高度互不相同的缆车车站. 有两家缆车公司 A 和 B, 各运营 k 辆缆车; 每辆从一个车站运行到某个更高的车站 (中间不停留其他车站). A 公司的 k 辆缆车的 k 个起点互不相同，k 个终点也互不相同, 并且起点较高的缆车，它的终点也较高. B 公司的缆车也满足相同的条件. 我们称两个车站被某个公司*连接*，如果可以从其中较低的车站通过该公司的一辆或多辆缆车到达较高的车站 (中间不允许在车站之间有其他移动).

确定最小的正整数 k, 使得一定有两个车站被两个公司同时连接.

第 5 题. 有一叠 $n > 1$ 张卡片. 在每张卡片上写有一个正整数. 这叠卡片具有如下性质：其中任意两张卡片上的数的算术平均值也等于这叠卡片中某一张或几张卡片上的数的几何平均值.

确定所有的 n, 使得可以推出这叠卡片上的数均相等?

第 6 题. 证明: 存在正常数 c 具有如下性质:

对任意整数 $n > 1$, 以及平面上 n 个点的集合 $\mathcal{S}$, 若 $\mathcal{S}$ 中任意两点之间的距离不小于 1，则存在一条分离 $\mathcal{S}$ 的直线 ℓ, 使得 $\mathcal{S}$ 中的每个点到直线 ℓ 的距离不小于 $cn^{-1/3}$.

(我们称直线 ℓ *分离* 点集 $\mathcal{S}$, 如果某条以 $\mathcal{S}$ 中两点为端点的线段与 ℓ 相交.)

注. 如果证明了比 $cn^{-1/3}$ 弱的估计 $cn^{-\alpha}$，会根据 $\alpha > 1/3$ 的值，适当给分.