2012年7月10日，星期二

1. 设 J 为三角形 ABC 顶点 A 所对旁切圆的圆心. 该旁切圆与边 BC 相切于点 M，与直线 AB 和 AC 分别相切于点 K 和 L. 直线 LM 和 BJ 相交于点 F，直线 KM 与 CJ 相交于点 G. 设 S 是直线 AF 和 BC 的交点，T 是直线 AG 和 BC 的交点.

证明：M 是线段 ST 的中点.

（三角形 ABC 的顶点 A 所对的旁切圆是指与边 BC 相切，并且与边 AB, AC 的延长线相切的圆.）

2. 设整数 $n \geq 3$，正实数 $a_2, a_3, \cdots, a_n$ 满足 $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$. 证明：

$$(1+a_2)^2 (1+a_3)^3 \cdots (1+a_n)^n > n^n .$$

3.“欺诈猜数游戏”在两个玩家甲和乙之间进行，游戏依赖于两个甲和乙都知道的正整数 k 和 n.

游戏开始时甲先选定两个整数 x 和 N，$1 \leq x \leq N$. 甲如实告诉乙 N 的值，但对 x 守口如瓶. 乙现在试图通过如下方式的提问来获得关于 x 的信息：每次提问，乙任选一个由若干正整数组成的集合 S（可以重复使用之前提问中使用过的集合），问甲“x 是否属于 S？”. 乙可以提任意数量的问题. 在乙每次提问之后，甲必须对乙的提问立刻回答“是”或“否”，甲可以说谎话，并且说谎的次数没有限制，唯一的限制是甲在任意连续 $k+1$ 次回答中至少有一次回答是真话.

在乙问完所有想问的问题之后，乙必须指出一个至多包含 n 个正整数的集合 X，若 x 属于 X，则乙获胜；否则甲获胜. 证明：

（1）若 $n \geq 2^k$，则乙可保证获胜；

（2）对所有充分大的整数 k，存在整数 $n \geq 1.99^k$，使得乙无法保证获胜.

考试时间：4小时30分
每题7分

53rd International Mathematical Olympiad
MAR DEL PLATA - ARGENTINA

Language: Chinese (Simplified)

Day: 2

2012年7月11日，星期三

4. 求所有的函数 $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$，使得对所有满足 $a+b+c=0$ 的整数 a,b,c，都有

$$f(a)^2+f(b)^2+f(c)^2=2f(a)f(b)+2f(b)f(c)+2f(c)f(a).$$

（这里$\mathbb{Z}$表示整数集.）

5. 已知三角形 ABC 中，$\angle BCA=90°$，D 是过顶点 C 的高的垂足. 设 X 是线段 CD 内部的一点. K 是线段 AX 上一点，使得 $BK=BC$. L 是线段 BX 上一点，使得 $AL=AC$. 设 M 是 AL 与 BK 的交点.

证明：$MK=ML$.

6. 求所有的正整数 n，使得存在非负整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，满足

$$\frac{1}{2^{a_1}}+\frac{1}{2^{a_2}}+\cdots+\frac{1}{2^{a_n}}=\frac{1}{3^{a_1}}+\frac{2}{3^{a_2}}+\cdots+\frac{n}{3^{a_n}}=1.$$

考试时间：4小时30分
每题7分