2017年7月18日, 星期二

第 1 题. 对每个整数 $a_0 > 1$, 定义数列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ 如下: 对于任意的 $n \geqslant 0$,

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n}, & \text{若 } \sqrt{a_n} \text{ 是一个整数}, \\ a_n + 3, & \text{其它情况}. \end{cases}$$

试求满足下述条件的所有 a_0: 存在一个数 A, 使得对无穷多个 n, 有 $a_n = A$.

第 2 题. 设 $\mathbb{R}$ 是全体实数构成的集合. 求所有的函数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 使得对于任意实数 x 和 y, 都有

$$f\left(f(x)f(y)\right) + f(x+y) = f(xy).$$

第 3 题. 一个猎人和一只隐形的兔子在欧氏平面上玩一个游戏. 已知兔子的起始位置 A_0 和猎人的起始位置 B_0 重合. 在游戏进行 $n-1$ 回合之后, 兔子位于点 A_{n-1}, 而猎人位于点 B_{n-1}. 在第 n 个回合中, 以下三件事情依次发生.

(i) 兔子以隐形的方式移动到一点 A_n, 使得点 A_{n-1} 和点 A_n 之间的距离恰为 1.

(ii) 一个定位设备向猎人反馈一个点 P_n. 这个设备唯一能够向猎人保证的事情是, 点 P_n 和点 A_n 之间的距离至多为 1.

(iii) 猎人以可见的方式移动到一点 B_n, 使得点 B_{n-1} 和点 B_n 之间的距离恰为 1.

试问, 是否无论兔子如何移动, 也无论定位设备反馈了哪些点, 猎人总能够适当地选择她的移动方式, 使得在 10^9 回合之后, 她能够确保和兔子之间的距离至多是 100?

2017年7月19日, 星期三

第 4 题. 设 R 和 S 是圆 Ω 上互异两点, 且 RS 不是直径. 设 ℓ 是圆 Ω 在点 R 处的切线. 平面上一点 T 满足, 点 S 是线段 RT 的中点. J 是圆 Ω 的劣弧 RS 上一点, 使得三角形 JST 的外接圆 Γ 交 ℓ 于两个不同点. 记 Γ 与 ℓ 的交点中接近 R 的那个为 A. 直线 AJ 交圆 Ω 于另一点 K. 证明, 直线 KT 和圆 Γ 相切.

第 5 题. 给定整数 $N \geqslant 2$. $N(N+1)$ 个身高两两不同的足球队员站成一排. 球队教练希望从这些球员中移走 $N(N-1)$ 人, 使得这一排上剩下的 $2N$ 名球员满足如下 N 个条件:

(1) 他们当中身高最高的两名球员之间没有别的球员,

(2) 他们当中身高第三和第四的两名球员之间没有别的球员,

$\vdots$

(N) 他们当中身高最矮的两名球员之间没有别的球员.

证明, 这总是可以做到的.

第 6 题. 一个本原格点是一个有序整数对 (x, y), 其中 x 和 y 的最大公约数是 1. 给定一个有限的本原格点集 S, 证明, 存在一个正整数 n 和整数 $a_0, a_1, \ldots, a_n$, 使得对于 S 中的每一个 (x, y), 都成立:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$