2014年7月8日, 星期二

第 1 题. 设 $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ 是一个无穷正整数列. 证明: 存在惟一的整数 $n \geq 1$ 使得

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

第 2 题. 设 $n \geq 2$ 是一个整数. 考虑由 n^2 个单位正方形组成的一个 $n \times n$ 棋盘. 一种放置 n 个棋子“车”的方案被称为是 *和平的*, 如果每一行和每一列上都恰好有一个“车”. 求最大的正整数 k, 使得对于任何一种和平放置 n 个“车”的方案, 都存在一个 $k \times k$ 的正方形, 它的 k^2 个单位正方形里都没有“车”.

第 3 题. 在凸四边形 $ABCD$ 中 $\angle ABC = \angle CDA = 90°$. 点 H 是 A 向 BD 引的垂线的垂足. 点 S 和点 T 分别在边 AB 和边 AD 上, 使得 H 在三角形 SCT 内部, 且

$$\angle CHS - \angle CSB = 90°, \quad \angle THC - \angle DTC = 90°.$$

证明: 直线 BD 和三角形 TSH 的外接圆相切.

2014 年 7 月 9 日, 星期三

第 4 题. 点 P 和 Q 在锐角三角形 ABC 的边 BC 上, 满足 $\angle PAB = \angle BCA$ 且 $\angle CAQ = \angle ABC$. 点 M 和 N 分别在直线 AP 和 AQ 上, 使得 P 是 AM 的中点, 且 Q 是 AN 的中点. 证明: 直线 BM 和 CN 的交点在三角形 ABC 的外接圆上.

第 5 题. 对每一个正整数 n, 开普敦银行都发行面值为 $\frac{1}{n}$ 的硬币. 给定总额不超过 $99+\frac{1}{2}$ 的有限多个这样的硬币 (面值不必两两不同) , 证明可以把它们分为至多 100 组, 使得每一组中硬币的面值之和最多是 1.

第 6 题. 平面上的一族直线被称为是 *处于一般位置* 的, 如果其中没有两条直线平行, 没有三条直线共点. 一族处于一般位置的直线把平面分割成若干区域, 我们把其中面积有限的区域称为这族直线的 *有限区域*. 证明: 对于充分大的 n 和任意处于一般位置的 n 条直线, 我们都可以把其中至少 $\sqrt{n}$ 条直线染成蓝色, 使得每一个有限区域的边界都不全是蓝色的.

注: 如果你的答卷上证明的是 $c\sqrt{n}$(而不是 $\sqrt{n}$) 的情形, 那么将会根据常数 c 的值给分.