2019年7月16日, 星期二

第1题. 用$\mathbb{Z}$表示全体整数构成的集合. 求所有函数$f\colon \mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, 满足对任意整数$a$和$b$, 都有

$$f(2a)+2f(b)=f(f(a+b)).$$

第2题. 在三角形ABC中, 点A_1在边BC上, 点B_1在边AC上. 点P和Q分别在线段AA_1和BB_1上, 且满足PQ平行于AB. 在直线PB_1上取点P_1, 使得点B_1严格位于点P与点P_1之间, 并且$\angle PP_1C=\angle BAC$. 类似地, 在直线QA_1上取点Q_1, 使得点A_1严格位于点Q与点Q_1之间, 并且$\angle CQ_1Q=\angle CBA$.

证明: 点P, Q, P_1, Q_1共圆.

第3题. 一个社交网络上有2019个用户, 某些用户之间是朋友关系. 只要用户A是用户B的朋友, 则用户B也是用户A的朋友. 如下形式的操作可反复进行, 每一时刻只进行一个操作:

> 三个用户A, B和C, 满足A与B, C都是朋友, 但B和C不是朋友, 则同时改变他们之间的朋友关系, 即B和C变为朋友, 但A与B不再是朋友, A与C也不再是朋友. 所有其他的朋友关系不改变.

已知最初时有1010个用户每人拥有1009个朋友, 有1009个用户每人拥有1010个朋友. 证明: 存在一个操作序列, 使得操作结束后, 每个用户至多只有一个朋友.

2019年7月17日, 星期三

第4题. 求所有正整数对(k,n), 满足

$$k! = (2^n-1)(2^n-2)(2^n-4)\cdots(2^n-2^{n-1}).$$

第5题. 巴斯银行发行的硬币在一面上铸有H, 在另一面上铸有T. 哈利有n枚这样的硬币并将这些硬币从左至右排成一行. 他反复地进行如下操作: 如果恰有$k\,(>0)$枚硬币H面朝上, 则他将从左至右的第k枚硬币翻转; 如果所有硬币都是T面朝上, 则停止操作. 例如: 当$n=3$, 并且初始状态是THT, 则操作过程为$THT \to HHT \to HTT \to TTT$, 总共进行了三次操作后停止.

(a) 证明: 对每个初始状态, 哈利总在有限次操作后停止.

(b) 对每个初始状态C, 记$L(C)$为哈利从初始状态C开始至停止操作时的操作次数, 例如$L(THT)=3$, $L(TTT)=0$. 求C取遍所有2^n个可能的初始状态时得到的$L(C)$的平均值.

第6题. 在锐角三角形ABC中, I是内心, $AB \neq AC$. 三角形ABC的内切圆ω与边BC, CA和AB分别相切于点D, E和F. 过点D且垂直于EF的直线与ω的另一点交点为R. 直线AR与ω的另一交点为P. 三角形PCE和三角形PBF的外接圆交于另一点Q.

证明: 直线DI和PQ的交点在过点A且垂直于AI的直线上.